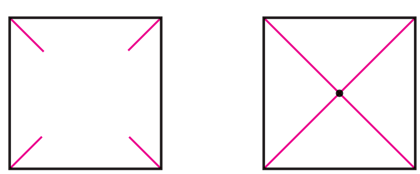
هم‌رسی نیم‌سازها و عمودمنصف‌ها در چهارضلعی

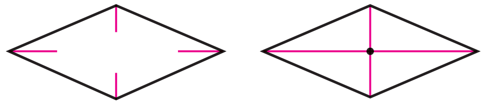
حسین کریمی

در فصل اول هندسهٔ دهم، با اثبات هم‌رسی سه نیم‌ساز زاویه‌های داخلی مثلث آشنا شدیم. اکنون این سؤال پیش می‌آید که: آیا در چهارضلعی‌ها نیز چنین است؟ یعنی آیا در تمام چهارضلعی‌ها نیز به‌مانند مثلث‌ها، نیم‌سازهای داخلی در یک نقطه به هم می‌رسند؟ یا شرایط خاصی لازم است؟

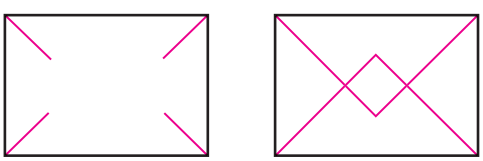
نمونهٔ اول: مربع



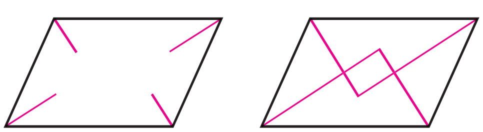
نمونهٔ دوم: لوزی



نمونهٔ سوم: مستطیل



نمونهٔ چهارم: متوازی‌الاضلاع

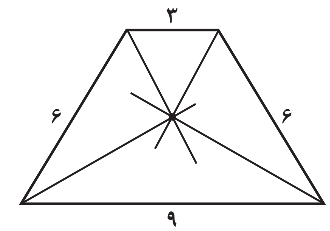


با بررسی مستطیل یا متوازی‌الاضلاع متوجه می‌شویم که نیم‌سازهای زوایای داخلی در یک نقطه به هم نمی‌رسند و این کافی است که بگوییم: «در همهٔ چهارضلعی‌ها، نیم‌سازهای داخلی، الزاماً هم‌رس نیستند.»

با بررسی مربع و لوزی و هم‌رسی نیم‌ساز زوایای

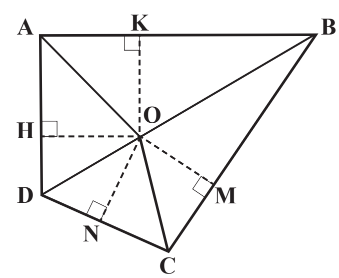
داخلـی، چنین به‌نظر می‌رسـد که اگـر چهارضلع برابر باشند، نیم‌سـازهای داخلی در یک نقطه به هم خواهند رسید.

نمونهٔ پنجم: ذوزنقه



در ذوزنقهٔ متساوی‌السـاقینی با قاعده‌های ۳ و ۹ و سـاق‌های ۶ واحدی، نیم‌سـازهای زوایای داخلی رئوس را رسـم می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که همگی در یک نقطه به هم می‌رسند. همین مورد یک مثال نقض برای لزوم برابری چهارضلع است. یعنی نیازی به برابری اضلاع در یک چهارضلعی، جهت هم‌رسـی نیم‌سازهای داخلی نیسـت. پس چه شرطی لازم اسـت؟ آیا شرطی وجود دارد؟

فرض کنید در چهارضلعی دلخواه زیر، نیم‌سـازهای داخلی در یک نقطه به هم رسـیده باشند. حال به دنبال شرایط خاص در آن چهارضلعی می‌گردیم.



$$\overset{\Delta}{OBK} \overset{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}}{\cong} \overset{\Delta}{OMB} \Rightarrow BK = BM$$

$$\overset{\Delta}{OMC} \overset{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}}{\cong} \overset{\Delta}{OCN} \Rightarrow CN = MC$$

$$\overset{\Delta}{OND} \overset{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}}{\cong} \overset{\Delta}{ODH} \Rightarrow ND = DH$$

$$\overset{\Delta}{OAH} \overset{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}}{\cong} \overset{\Delta}{OAK} \Rightarrow AK = AH$$

با جمع طرفین، چهار تساوی اخیر داریم:

$$AK+BK+CN+ND=BM+MC+DH+HA$$

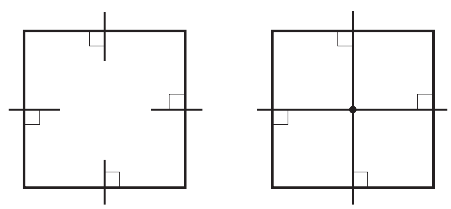
و یا به عبارت دیگر:

$$AB+CD=BC+AD$$

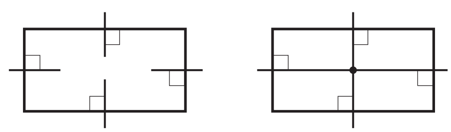
عکس مطلب فوق هم درسـت اسـت. یعنی هرگاه در یک چهارضلعـی، مجموع دو ضلع روبه‌رو با مجموع دو ضلع روبه‌روی دیگر برابر باشـد، در آن چهارضلعی، نیم‌سـازهای داخلـی در یـک نقطه به هم می‌رسـند (هم‌رسـند) که فعلاً از اثبات عکـس مطلب صرف‌نظر می‌کنیم.

همچنیـن، در فصل اول هندسـهٔ دهم، بـا اثبات هم‌رسـی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث آشـنا شدیم. اکنون این سـؤال پیش می‌آید که: آیا در چهارضلعی‌ها نیز چنین اسـت؟ یعنی آیا در تمـام چهارضلعی‌ها نیز به‌ماننـد مثلث‌ها، عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه به هم می‌رسند؟ یا شرایط خاصی لازم است؟

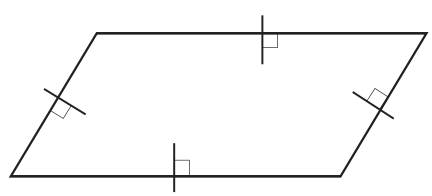
نمونهٔ اول: مربع



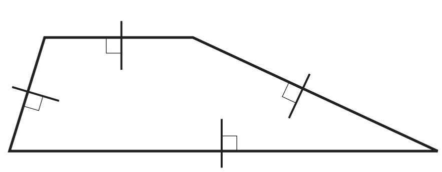
نمونهٔ دوم: مستطیل



نمونهٔ سوم: متوازی‌الاضلاع

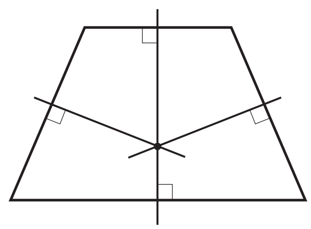


نمونهٔ چهارم: ذوزنقه

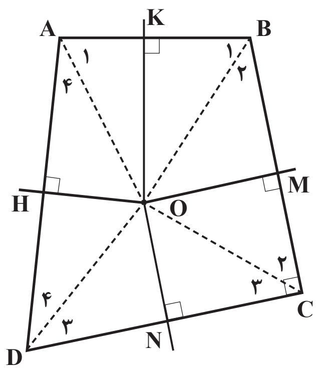


با بررسی متوازی‌الاضلاع و ذوزنقه متوجه می‌شویم که عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه به هم نمی‌رسند و این کافی است که بگوییم در همهٔ چهارضلعی‌ها، عمودمنصف‌های اضلاع، الزاماً هم‌رس نیستند. با بررسی مربع و مستطیل و هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع، چنین به‌نظر می‌رسد که اگر اندازهٔ چهار زاویه برابر باشند (قائمه)، عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه به هم خواهند رسید.

نمونهٔ پنجم: ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین



در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، عمودمنصف‌های اضلاع را رسم می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که همگی در یک نقطه به هم می‌رسند. همین مورد یک مثال نقض برای لزوم برابری چهار زاویه است. یعنی نیازی به برابری زوایا در یک چهارضلعی، برای هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع نیست. پس چه شرطی لازم است؟ آیا شرطی وجود دارد؟ فرض کنید در چهارضلعی دلخواه زیر، عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه به هم رسیده باشند. حال به دنبال شرایط خاص در آن چهارضلعی می‌گردیم.



$$\overset{\Delta}{OAK} \overset{\text{وتر و یک ضلع قائمه}}{\cong} \overset{\Delta}{OBK} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

$$\overset{\Delta}{OBM} \overset{\text{وتر و یک ضلع قائمه}}{\cong} \overset{\Delta}{OMC} \Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{B}_2$$

$$\overset{\Delta}{OCN} \overset{\text{وتر و یک ضلع قائمه}}{\cong} \overset{\Delta}{ODN} \Rightarrow \hat{C}_3 = \hat{D}_3$$

$$\overset{\Delta}{ODH} \overset{\text{وتر و یک ضلع قائمه}}{\cong} \overset{\Delta}{OAH} \Rightarrow \hat{A}_4 = \hat{D}_4$$

با جمع طرفین چهار تساوی اخیر داریم:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_4 + \hat{C}_2 + \hat{C}_3 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{D}_3 + \hat{D}_4$$

و یا به عبارت دیگر: $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D}$ و در نتیجه:

$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ (چرا؟)

عکس مطلب فوق هم درست است. یعنی هرگاه در یک چهارضلعی، مجموع دو زاویهٔ روبه‌رو ۱۸۰ درجه باشد، در آن چهارضلعی عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه به هم می‌رسند (هم‌رسند) که فعلاً از اثبات عکس مطلب صرف‌نظر می‌کنیم.

نتیجهٔ پایانی

۱. در یک چهارضلعی، نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی هم‌رسند، اگر و تنها اگر مجموع هر دو ضلع مقابل، با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر باشد.

۲. در یک چهارضلعی، عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه هم‌رسند، اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌رو دوبه‌دو مکمل یکدیگر باشند.

در مثلث متساوی‌الساقین ABC به رأس A، $\hat{A} = 80^\circ$ و نقطهٔ O را داخل مثلث طوری در نظر گرفته‌ایم که AB=OB و $O\hat{B}C = 10^\circ$. در این صورت اندازهٔ $O\hat{C}A$ چند درجه است؟

- ☐ الف) 30°
- ☐ ب) 20°
- ☐ ج) 15°
- ☐ د) 40°
- ☐ هـ) 10°